3. Implicitní funkce

1. Je dán vztah $e^{xy} + \sin y + y^2 = 1$ a bod $[2, 0]$.

(1) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $y = \varphi(x)$ v jistém okolí bodu 2, pro kterou platí $\varphi(2) = 0$;
(2) napište rovnici tečny ke grafu funkce φ v bodě 2.

2. Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1, -2, 1]$.

(1) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x, y)$ v jistém okolí U bodu $[1, -2]$, pro kterou platí $z(1, -2) = 1$;
(2) určete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U;
(3) napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x, y)$ v bodě $[1, -2]$.

3. Je dána vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0, 1]$. Dokažte, že

(1) tímto vztahem je definována hladká funkce $y = \varphi(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $\varphi(0) = 1$;
(2) spočtěte $\varphi'(0)$ a $\varphi''(0)$;
(3) funkce φ roste v jistém okolí bodu 0.

4. Dokažte, že množina bodů $[x, y, z] \in \mathbb{R}$, které splňují vztah

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$$

je v okolí bodu $[1, 1, 1]$ popsatelná jako graf funkce $f(x, y)$ definované na jistém okolí bodu (1,1), pro kterou je $f(1, 1) = 1$. Určete totální diferenciál v bodě $[1, 1]$ a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v tomto bodě.

5. Spočtěte parciální derivace funkce z v bodě $[0, 1]$, která je implicitně zadaná rovnicí

$$\frac{x}{z} = \log \frac{z}{y}$$

a splňuje $z(0, 1) = 1$.

6. V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí daného bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě x_0.

- $\sin(\sin y) + \cos(\sin x) = \sin(\cos x) + \cos(\cos y)$, $[\pi/2, 0]$
- $\arcsin(x + y) + \arccos(x^2 + y^2) = \pi/2$, $[0, 0]$
- $x^3 + y^3 = \log \frac{x^2+y^2}{2}$, $[1, -1]$
- $e^{2x+7y} - \log(1 + x^2 + y^2) = 1 + y$, $[0, 0]$
- $\operatorname{arctg}(x + y^2 + \cos(x + y)) - \sin(x + y) = \frac{\pi}{4}$, $[0, 0]$
- $x^3 + y^7 = e^{xy^2} - \sin y$, $[1, 0]$
- $\sin^2\left(e^{x+y}\right) + \cos^2\left(e^{2y-x}\right) = 1$, $[0, 0]$
- $\log\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $[1, 0]$
- $y - \frac{1}{2}\sin y = x$, $[0, 0]$
- $y = 2x \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $[1, 0]$

V následujících úlohách ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí daného bodu $[x_0, y_0]$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě x_0.

7. $\sin(xy) + \cos(xy) = 1,\ [\pi, 0]$

8. $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1,\ [1, 0]$

9. $\log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y = 0,\ [0, 0]$

10. $\log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy = 0,\ [0, 0]$

11. $x^y + y^x = 2y,\ [1, 1]$

12. $y^3x^2 + y^2x^2 + \sin y = 0,\ [0, 0]$

13. $e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} = 2y + 2,\ [0, 0]$

14. $\pi/2 + \arcsin(x + y^2) = \arccos(y + x^2),\ [0, 0]$

15. $\operatorname{arctg}(y^2 + xy) = e^{xy} - \cos x + y,\ [0, 0]$

V následujících úlohách ukažte, že uvedená soustava rovnic určuje v jistém okolí daného bodu $[x_0, y_0, u_0, v_0]$ implicitně zadané funkce u, v (proměnných x, y). Spočtěte obě první parciální derivace těchto funkcí v bodě $[x_0, y_0]$.

16.

$$\begin{aligned} x &= u \cos \frac{v}{u} \\ y &= u \sin \frac{v}{u}, \qquad [1, 0, 1, 0] \end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned} x &= e^u + u \sin v \\ y &= e^u - u \cos v, \qquad [e + 1, e, 1, \pi/2] \end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned} xe^{u+v} + 2uv &= 1 \\ ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} &= 2x, \qquad [1, 2, 0, 0] \end{aligned}$$

Výsledky

1. Rovnice tečny: $y = 0$.

2. Rovnice tečné roviny: $L(x, y) = \frac{7}{5}(y + 2) + 1$.

3. $\varphi'(0) = 2$, $\varphi''(0) = -16$.

4. Rovnice tečné roviny: $L(x, y) = -(x - 1) - (y - 1) + 1$.

5. $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) = 1$

6.1. $-1,\ 0$ **6.2.** $-1,\ 4$ **6.3.** $-1/2,\ -11/8$ **6.4.** $-1/3,\ 19/54$ **6.5.** $-1/2,\ -3/8$ **6.6.** $-3,\ 12$ **6.7.** $2,\ 0$ **6.8.** $1,\ 2$ **6.9.** $2,\ 0$ **6.10.** $0,\ 0$

7. Položme

$$F(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy) - 1.$$

Funkce F je definována na $\mathbf{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \cos(xy) \cdot y - \sin(xy) \cdot y, \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \cos(xy) \cdot x - \sin(xy) \cdot x.
\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbf{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(\pi, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(\pi, 0) = \pi \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[\pi, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{gathered}
\sin(x\varphi(x)) + \cos(x\varphi(x)) = 1, \\
\cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) - \sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x)) = 0, \\
-\sin(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + \cos(x\varphi(x)) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) \\
-\cos(x\varphi(x)) \cdot (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x)) \cdot (2\varphi'(x) + x\varphi''(x)) = 0.
\end{gathered}$$

Dosadíme-li $x = \pi$ a použijeme-li $\varphi(\pi) = 0$, dostaneme $\varphi'(\pi) = 0$ a $\varphi''(\pi) = 0$.

8. Položme

$$F(x, y) = 2x^4y + x^3 + y^3 + xy - 1.$$

Funkce F je definována na $\mathbf{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= 8x^3y + 3x^2 + y, \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= 2x^4 + 3y^2 + x.
\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbf{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(1, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1, 0) = 3 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné

x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$
\begin{gathered}
2x^4\varphi(x) + x^3 + \varphi(x)^3 + x\varphi(x) - 1 = 0,\\
8x^3\varphi(x) + 2x^4\varphi'(x) + 3x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,\\
24x^2\varphi(x) + 8x^3\varphi'(x) + 8x^3\varphi'(x) + 2x^4\varphi''(x) + 6x + 6\varphi(x)(\varphi'(x))^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)\\
+\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0.
\end{gathered}
$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 0$, dostaneme $\varphi'(1) = -1$ a $\varphi''(1) = 4$.

9. Položme
$$F(x, y) = \log(x^2 + y^2 + \cos(xy)) + y.$$
Funkce F je definována na jisté otevřené množině G (lze ukázat, že dokonce $G = \mathbf{R}^2$) obsahující bod $[0, 0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{x^2 + y^2 + \cos(xy)} \cdot (2x - \sin(xy) \cdot y),\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{x^2 + y^2 + \cos(xy)} \cdot (2y - \sin(xy) \cdot x) + 1.
\end{aligned}
$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\log(x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))) + \varphi(x) = 0,$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))} \cdot (2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - \sin(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x)))\\
+ \varphi'(x) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{-1}{(x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x)))^2} \cdot (2x + 2\varphi(x)\varphi'(x) - \sin(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2\\
+ \frac{1}{x^2 + \varphi(x)^2 + \cos(x\varphi(x))} \cdot (2 + 2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)\\
- \cos(x\varphi(x))(\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 - \sin(x\varphi(x))(2\varphi'(x) + x\varphi''(x))) + \varphi''(x) = 0.
\end{gathered}
$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = -2$.

10. Položme
$$F(x, y) = \log(x + \operatorname{arctg} y + 1) + xy.$$
Funkce F je definována na jisté otevřené množině G obsahující bod $[0, 0]$ a pro její parciální derivace platí:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} + y,\\
\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{x + \operatorname{arctg} y + 1} \cdot \frac{1}{1 + y^2} + x.
\end{aligned}
$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0,0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\log(x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1) + x\varphi(x) = 0,$$

$$\frac{1}{x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1} \cdot \left(1 + \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi(x)^2}\right) + \varphi(x) + x\varphi'(x) = 0,$$

$$\frac{-1}{(x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1)^2} \cdot \left(1 + \frac{\varphi'(x)}{1 + \varphi(x)^2}\right)^2$$
$$+ \frac{1}{x + \operatorname{arctg} \varphi(x) + 1} \cdot \frac{\varphi''(x)(1 + \varphi(x)^2) - 2\varphi'(x)\varphi'(x)\varphi(x)}{(1 + \varphi(x)^2)^2}$$
$$+ \varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x) = 0,$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = -1$ a $\varphi''(0) = 2$.

11. Položme
$$F(x,y) = x^y + y^x - 2y.$$

Funkce F je definována na otevřené množině $G = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$, která obsahuje bod $[1,1]$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} + y^x \log y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^y \log x + xy^{x-1} - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na G spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(1,1) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu
$$x^{\varphi(x)} + \varphi(x)^x - 2\varphi(x) = 0.$$

Tento vztah si přepišme na tvar

$$e^{\varphi(x) \log x} + e^{x \log \varphi(x)} - 2\varphi(x) = 0.$$

Nyní postupně obdržíme

$$e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi'(x) \log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right) + e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\log \varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right) - 2\varphi'(x) = 0,$$

$$e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi'(x) \log x + \frac{\varphi(x)}{x}\right)^2 + e^{\varphi(x) \log x} \cdot \left(\varphi''(x) \log x + 2\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x^2}\right)$$
$$+ e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\log \varphi(x) + \frac{x\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)^2$$
$$+ e^{x \log \varphi(x)} \cdot \left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} + \frac{(\varphi'(x) + x\varphi''(x))\varphi(x) - x\varphi'(x)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}\right) - 2\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 1$ a použijeme-li $\varphi(1) = 1$, dostaneme $\varphi'(1) = 1$ a $\varphi''(1) = 4$.

12. Položme

$$F(x, y) = y^3x^2 + y^2x^2 + \sin y.$$

Funkce F je definována na $\mathbf{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2y^3x + 2y^2x,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 3y^2x^2 + 2yx^2 + \cos y.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbf{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\varphi(x)^3x^2 + \varphi(x)^2x^2 + \sin\varphi(x) = 0.$$

Postupně obdržíme

$$3\varphi(x)^2\varphi'(x)x^2 + 2\varphi(x)^3x + 2\varphi(x)\varphi'(x)x^2 + 2\varphi(x)^2x + \cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x) = 0,$$
$$6\varphi(x)\varphi'(x)\varphi'(x)x^2 + 3\varphi(x)^2\varphi''(x)x^2 + 6\varphi(x)^2\varphi'(x)x + 6\varphi(x)^2\varphi'(x)x$$
$$+2\varphi(x)^3 + 2\varphi'(x)\varphi'(x)x^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)x^2 + 4\varphi(x)\varphi'(x)x$$
$$+4\varphi(x)\varphi'(x)x + 2\varphi(x)^2 - \sin\varphi(x)\cdot\varphi'(x)\varphi'(x) + \cos\varphi(x)\cdot\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 0$.

13. Položme

$$F(x, y) = e^{\sin x^2} + e^{\sin xy} - 2y - 2.$$

Funkce F je definována na $\mathbf{R}^2$. Pro parciální derivace F platí:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x + e^{\sin xy}\cdot\cos xy\cdot y,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = e^{\sin xy}\cdot\cos xy\cdot x - 2.$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbf{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $F \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = -2 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$e^{\sin x^2} + e^{\sin x\varphi(x)} - 2\varphi(x) - 2 = 0.$$

Postupně obdržíme

$$e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2x + e^{\sin x\varphi(x)}\cos x\varphi(x)\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x)) - 2\varphi'(x) = 0,$$
$$e^{\sin x^2}\cdot(\cos x^2\cdot 2x)^2 - e^{\sin x^2}\cdot\sin x^2\cdot 4x^2$$
$$+e^{\sin x^2}\cdot\cos x^2\cdot 2 + e^{\sin x\varphi(x)}(\cos x\varphi(x)\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x)))^2$$
$$-e^{\sin x\varphi(x)}\sin x\varphi(x)\cdot(\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 + e^{\sin x\varphi(x)}\cos x\varphi(x)\cdot(2\varphi'(x) + x\varphi''(x))$$
$$-2\varphi''(x) = 0.$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = 1$.

14. Položme

$$F(x, y) = \pi/2 + \arcsin(x + y^2) - \arccos(y + x^2).$$

Bod $[0, 0]$ je ve vnitřku definičního oboru funkce F - můžeme tedy spočítat parciální derivace funkce F na jistém okolí G bodu $[0, 0]$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{1-(x+y^2)^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1-(y+x^2)^2}} \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{2y}{\sqrt{1-(x+y^2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(y+x^2)^2}}.
\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na jistém okolí bodu $[0, 0]$ spojité a navíc tam jsou jejich parciální derivace spojité, tj. $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné x, která je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\begin{gathered}
\arcsin(x + (\varphi(x))^2) + \pi/2 - \arccos(\varphi(x) + x^2) = 0, \\
\frac{1 + 2\varphi(x)\varphi'(x)}{\sqrt{1-(x+(\varphi(x))^2)^2}} + \frac{\varphi'(x) + 2x}{\sqrt{1-(\varphi(x)+x^2)^2}} = 0, \\
-\frac{1}{2}(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(x+(\varphi(x))^2)) \cdot (1+2\varphi(x)\varphi'(x))^2 \\
+(1-(x+(\varphi(x))^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x)) \\
-\frac{1}{2}(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2(\varphi(x)+x^2)) \cdot (\varphi'(x)+2x)^2 \\
+(1-(\varphi(x)+x^2)^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (\varphi''(x)+2) = 0.
\end{gathered}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a využijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = -1$ a $\varphi''(0) = -4$.

15. Položme

$$F(x, y) = \operatorname{arctg}(y^2 + xy) - e^{xy} + \cos x - y.$$

Funkce F je definována na $\mathbf{R}^2$ a pro její parciální derivace platí:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) &= \frac{y}{1+(y^2+xy)^2} - e^{xy}y - \sin x, \\
\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) &= \frac{2y+x}{1+(y^2+xy)^2} - e^{xy}x - 1.
\end{aligned}$$

Obě parciální derivace jsou na $\mathbf{R}^2$ spojité, stejně jako jejich parciální derivace, tj. $f \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}^2)$. Dále platí $F(0, 0) = 0$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = -1 \neq 0$. Tím jsme ověřili, že naše rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ implicitně zadanou funkci proměnné

x, která sama je třídy $\mathcal{C}^2$. Funkci označme φ a její derivace vypočítejme postupným derivováním vztahu

$$\operatorname{arctg}((\varphi(x))^2 + x\varphi(x)) - e^{x\varphi(x)} + \cos x - \varphi(x) = 0.$$

$$\frac{2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x)}{1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2} - (\varphi(x) + x\varphi'(x))e^{x\varphi(x)} - \sin x - \varphi'(x) = 0,$$

$$\begin{aligned} &\frac{-2((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))}{(1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2)^2} \cdot (2\varphi(x)\varphi'(x) + \varphi(x) + x\varphi'(x))^2 \\ &+ \frac{2(\varphi'(x))^2 + 2\varphi(x)\varphi''(x) + \varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x)}{1 + ((\varphi(x))^2 + x\varphi(x))^2} \\ &-(\varphi'(x) + \varphi'(x) + x\varphi''(x))e^{x\varphi(x)} - (\varphi(x) + x\varphi'(x))^2 e^{x\varphi(x)} \\ &- \cos x - \varphi''(x) = 0. \end{aligned}$$

Dosadíme-li $x = 0$ a použijeme-li $\varphi(0) = 0$, dostaneme $\varphi'(0) = 0$ a $\varphi''(0) = -1$.

16. $\frac{\partial u}{\partial x}(1,0) = 1$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1,0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1,0) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1,0) = 1$

17. $\frac{\partial u}{\partial x}(e+1,e) = 1/(1+e)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(e+1,e) = -e/(e+1)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(e+1,e) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y}(e+1,e) = 1$

18. $\frac{\partial u}{\partial x}(1,2) = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x}(1,2) = -1$, $\frac{\partial u}{\partial y}(1,2) = -1/3$, $\frac{\partial v}{\partial y}(1,2) = 1/3$